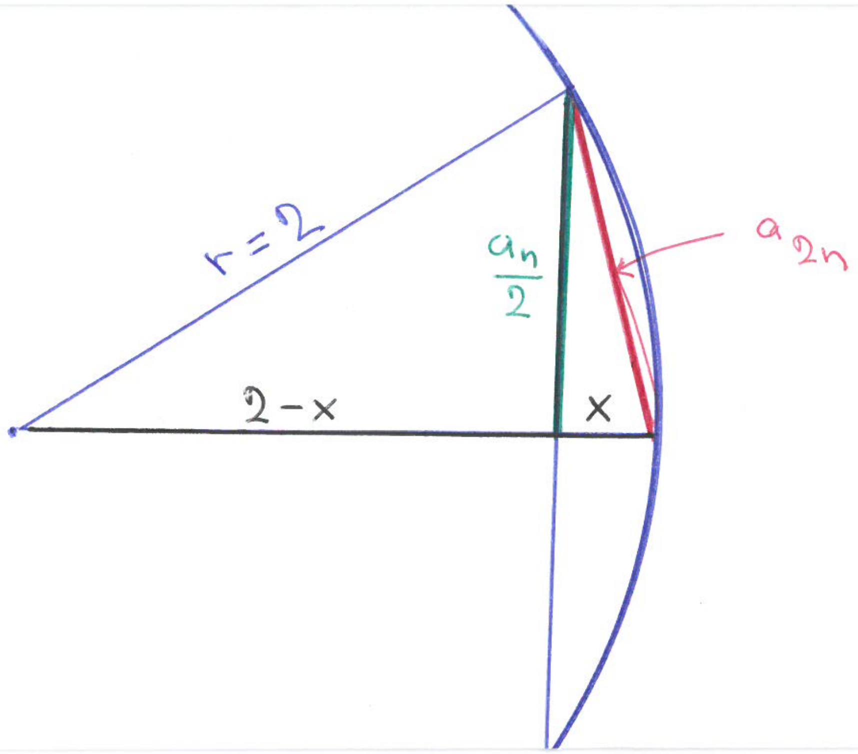

Vi har två rätvinkliga trianglar och använder Pythagoras sats:

$$2^2 = (2-x)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \quad \text{och} \quad a_{2n}^2 = x^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2.$$

Tillsammans ger de

$$4 = (2-x)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = 4 - 4x + x^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = 4 - 4x + a_{2n}^2.$$

Alltså $4x = a_{2n}^2$. Vi sätter in detta i den andra ekvationen och får

$$a_{2n}^2 = \left(\frac{a_{2n}^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2.$$

Om vi låter $y := a_{2n}^2$, så fås andragradsekvationen $y^2 - 16y + 4a_n^2 = 0$ (efter lite förenkling). Dess lösningar är

$$a_{2n}^2 = y = 8 \pm \sqrt{64 - 4a_n^2} = 4\left(2 \pm \sqrt{4 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right).$$

Från ovan har vi $4x = a_{2n}^2$ och alltså $x = 2 \pm \sqrt{4 - (a_n/2)^2}$. Men x kan inte vara större än 2, så $x = 2 - \sqrt{4 - (a_n/2)^2}$, vilket ger

$$a_{2n} = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}.$$

En kvadrat inskriven i en cirkel med radie 2 har sidlängd $a_4 = 2\sqrt{2}$ och en regelbunden 8-hörning och 16-hörning har då sidlängder

$$a_8 = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{och} \quad a_{16} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Om vi forstätter på detta sätt, så får vi 64-hörning, osv. Vi ser (eller bevisar med matematisk induktion) att en regelbunden 2^k-hörning har sidlängd

$$a_{2^k} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}},$$

där antalet 2:or är exakt k.