Skriv n som $n = 100000m + k$, där k är ett femsiffrigt tal. Då blir

$$n^3 = (100000m)^3 + 3(100000m)^2k + 3 \cdot 100000mk^2 + k^3.$$

De första tre termerna slutar alla med 00000 (eftersom de är delbara med 100000), så n^3 slutar med 56789 precis då k^3 gör det. Det räcker alltså att hitta alla femsiffriga tal k så att k^3 slutar med 56789.

Börja med att skriva $k = 10a + b$, där a är ett positivt heltal och b är en siffra (0 till 9). Eftersom

$$k^3 = (10a + b)^3 = (10a)^3 + 3(10a)^2b + 3 \cdot 10ab^2 + b^3$$

och de första tre termerna slutar alla med 0 (eftersom de är delbara med 10), så måste b^3 sluta med 9, alltså $b = 9$ (då det måste vara udda och $1^3 = 1$, $3^3 = 27$, $5^3 = 125$ och $7^3 = 343$).

Alltså $k = 10a + 9$ och

$$k^3 = (10a)^3 + 3(10a)^2 \cdot 9 + 3 \cdot 10a \cdot 9^2 + 9^3.$$

De första två termerna slutar med 00 (eftersom de är delbara med 100), alltså måste $3 \cdot 10a \cdot 9^2 + 9^3$ sluta med 89. Eftersom $10 \cdot 9^2$ slutar med 10 och $9^3 = 729$, så har $3 \cdot 10a \cdot 9^2 + 9^3$ samma två sista siffror som $30a + 29$, d.v.s. $30a$ skall sluta med $89 - 29 = 60$. Alltså slutar $3a$ med siffran 6, vilket ger $a = 2$ (då a måste vara jämnt och ingen annan jämn siffra funkar).

Vi kan nu skriva $k = 100c + 29$ och fortsätter på samma sätt:

$$k^3 = (100c + 29)^3 = (100c)^3 + 3(100c)^2 \cdot 29 + 3 \cdot 100c \cdot 29^2 + 29^3.$$

De första två termerna slutar med 000 (eftersom de är delbara med 1000), så $3 \cdot 100c \cdot 29^2 + 29^3$ måste sluta med 789. Eftersom $100 \cdot 29^2$ slutar med 100 (då 29^2 slutar med 1) och $29^3 = 24389$ slutar med 389, så måste $300c + 389$ sluta med 789, alltså $3c + 3$ slutar med 7. Detta ger att $3c$ slutar med 4 och därmed $c = 8$ (ty c måste vara jämnt och $3 \cdot 8 = 24$ medan ingen annan jämn siffra funkar).

Vi har nu $k = 1000d + 829$ och

$$k^3 = (1000d)^3 + 3(1000d)^2 \cdot 829 + 3 \cdot 1000d \cdot 829^2 + 829^3.$$

Som förut är det bara de två sista termerna som är intressanta: Eftersom $1000 \cdot 829^2$ slutar med 1000 (då 829^2 slutar med 1) och 829^3 slutar med 2789 (här är miniräknare tillåten!), så måste $3000d + 2789$ sluta med 6789. Detta ger att $3d + 2$ slutar med 6, alltså $d = 8$ (på samma sätt som ovan).

Slutligen, $k = 100000e + 8829$ och

$$k^3 = (10000e)^3 + 3(10000e)^2 \cdot 8829 + 3 \cdot 10000e \cdot 8829^2 + 8829^3.$$

Igen är det bara de två sista termerna som är intressanta: $10000 \cdot 8829^2$ slutar med 100000 medan 8829^3 slutar med 06789 (här är miniräknare tillåten!). Vi ser då att $30000e + 6789$ skall sluta med 56789, alltså $3e$ slutar med 5, vilket ger $e = 5$, och därmed $k = 58829$.

SVAR: De enda positiva heltal, vars kub slutar med 56789, är tal som slutar med 58829.